

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Биологический факультет

УТВЕРЖДАЮ

" ____ " _____ 200__ г.

Рабочая программа дисциплины
Высшая математика

Направление подготовки
.....Биология

Профили подготовки

·
·
·
·

Форма обучения
Очная

Москва 2013

I. Название дисциплины: Высшая математика

II. Шифр дисциплины

III. Цели и задачи дисциплины

A. Цели дисциплины:

- введение в основной круг определений и понятий математического анализа, дифференциальных уравнений, аналитической геометрии и линейной алгебры;
- развитие системного подхода к анализу различных задач математики и естествознания;
- развитие комплексного подхода к различным задачам математики и естествознания.
- развитие логического мышления студентов.

Б. Задачи дисциплины:

- получение навыков нахождения пределов, производных, неопределенных и определённых интегралов, представлений функции в ряд;
- получение навыков решения систем линейных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений;
- освоение различных теоретических понятий курса и изучение их применения на практике;
- Формирование у студентов способности применять методы математического анализа и линейной алгебры для исследования конкретных задач, в том числе и в профессиональной сфере.

IV. Место курса в ООП

Основной курс по математике естественно-научных специальностей. Осваивается студентами первого года обучения в течении двух первых семестров.

А.

Б. Обязательный годовой курс первого года обучения.

В. Дисциплины, необходимые для освоения курса отсутствуют. Курс строится на базе общеобразовательного материала.

Г. Общая трудоемкость курса 6 или 7 з.е. в зависимости от подплана.

Д. Формы промежуточной аттестации: экзамены в конце первого и второго семестров.

V. Формы проведения

- форма проведения занятий: лекции и практические занятия (семинары);
- формы текущего контроля: коллоквиум, контрольные работы.

VI. Распределение трудоемкости по лекциям и семинарам

| Наименование разделов | Лекции, трудоемкость | Семинары, трудоемкость | Формы контроля |
|---|----------------------|------------------------|------------------------|
| 1. Построение эскизов графиков элементарных функций | | 6 | Контрольная работа № 1 |
| 2. Предел последовательности | 4 | 6 | |
| 3. Предел и непрерывность функции | 5 | | |
| 4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной | 4 | 5 | Контрольная работа № 2 |
| 5. Графики функций с полным исследованием | | 7 | |
| 6. Элементы линейной алгебры, векторной алгебры и аналитической геометрии | 5 | 7 | Контрольная работа № 3 |
| 7. Функции многих переменных | 3 | 6 | |
| 8. Интегральное исчисление, первообразная и неопределенный интеграл | | 7 | Контрольная работа № 4 |
| 9. Интегральное исчисление, определенный интеграл и его приложения | 6 | 4 | |
| 10. Обыкновенные дифференциальные уравнения | 6 | 6 | Контрольная работа № 5 |
| 11. Числовые и функциональные ряды | 6 | 6 | |

VII. Содержание дисциплины.

I Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Матрицы, действия с ними, обратная матрица, собственные значения и собственные векторы матрицы. Определители и их свойства. Системы линейных уравнений. Математическая модель распределения генотипов в популяции.

Векторы, их свойства, выражение операций над векторами через их координаты. Прямые и плоскости в пространстве. Эллипс, гипербола, парабола.

II Математический анализ

1 Функции одной переменной

Общее понятие функции, последовательность как функция натурального аргумента. Пределы последовательности и функции, общие теоремы, действия с пределами, бесконечно малые и бесконечно большие, их свойства. Точные верхняя и нижняя грани множества. Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях. Число ϵ . Асимптотическое поведение функций, эквивалентные и их свойства, таблица эквивалентных, символ «о-малое».

Непрерывность, действия с непрерывными функциями, общие теоремы. Непрерывность элементарных функций.

Производная и дифференциал функции одной переменной, геометрический смысл и инвариантность дифференциала. Правила дифференцирования, таблица производных. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа. Исследование поведения функции с помощью производных. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

2 Функции нескольких переменных

Функции двух и трех переменных, область определения, линии и поверхности уровня. Пределы и непрерывность.

Частные производные и дифференциал функции двух переменных. Геометрический смысл и инвариантность дифференциала функции двух переменных. Связь дифференцируемости с непрерывностью и наличием частных производных.

Теоремы о дифференцировании сложных функций. Производная по направлению, градиент, его инвариантность. Производные высших порядков. Локальный экстремум функции двух переменных, необходимое условие экстремума, достаточное условие локального экстремума.

3 Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл, основные свойства и методы вычисления, таблица интегралов.

Определенный интеграл, простейшие свойства, необходимый признак интегрируемости. Множества меры нуль, их простейшие свойства, формулировка критерия Лебега интегрируемости функций. Следствия из критерия Лебега. Интегрирование неравенств, теорема о среднем. Интеграл как функция верхнего предела, формула Ньютона – Лейбница. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Основные понятия о несобственных интегралах.

Приложения определенного интеграла: вычисление площадей, объемов, длин дуг, работы переменного поля сил на прямолинейном пути.

4 Элементы теории дифференциальных уравнений

Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема существования и единственности, методы изоклин и ломаных Эйлера. Методы решения основных уравнений первого порядка.

Линейные уравнения второго, линейная независимость решений, определитель Вронского, фундаментальная система решений.

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение, метод неопределенных коэффициентов. Понятие о системах дифференциальных уравнений.

Биологические модели, использующие дифференциальные уравнения: модели радиоактивного распада и роста биомассы, модель роста деревьев, модель «хищник – жертва».

5 Теория рядов

Числовые ряды, простейшие свойства, критерий Коши сходимости рядов. Ряды с положительными членами, признаки сравнения. Признаки Коши и Даламбера, интегральный признак Коши.

Абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница.

Функциональные ряды, непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование.

Степенные ряды, теорема Абеля, интервал и радиус сходимости. Свойства суммы степенного ряда. Ряды Тейлора, разложение основных функций в ряды. Ряды с комплексными членами, формулы Эйлера.

VIII. Перечень компетенций. В результате освоения дисциплины формируются общенаучные и профессиональные компетенции в соответствии с образовательным стандартом.

Требования к результатам освоения дисциплины:

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- основные понятия и теоремы: теории пределов;
- основные понятия и теоремы дифференциального исчисления одной и нескольких переменных;
- основные понятия и теоремы аналитической геометрии и линейной алгебры;
- основные понятия и теоремы интегрального исчисления;
- основные понятия и теоремы теории дифференциальных уравнений;
- основные понятия и теоремы теории числовых и функциональных рядов.
-

Уметь:

- вычислять пределы;
- дифференцировать различные функции;
- исследовать функции и строить их графики;
- вычислять скалярное, векторное и смешанное произведение векторов;
- решать простейшие задачи линейной алгебры и аналитической геометрии;
- вычислять интегралы;
- находить площади различных плоских фигур, длины кривых, объемы тел вращения;
- решать различные типы дифференциальных уравнений;
- исследовать числовые и функциональные ряды на сходимость (абсолютную, условную);
- раскладывать функции в ряд Тейлора.

Уровень усвоения курса определяется различными **формами текущего и заключительного контроля. Текущий контроль:** контрольные работы и коллоквиумы. **Заключительный контроль:** экзамены в конце первого и второго семестров.

IX. Используемые технологии.

- А. Современные образовательные технологии.
- Б. Научно-исследовательские технологии.

X. Учебно-методические рекомендации

Примерные варианты контрольных работ к курсу высшей математики для биологов, семестр 1.

Контрольная работа № 1.

Изобразить графики функций:

$$1. y = \arccos\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{\pi}{4}$$

$$2. y = \frac{1}{2^{1-x} - 1}$$

$$3. y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2x-1}\right)$$

$$4. y = \operatorname{arccotg} \frac{x}{1-x}$$

Вычислить пределы:

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 + 3x}}{\sqrt[5]{x^5 + 3} + \sqrt[4]{16x^4 + x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cos(3x - 9) - \cos(2x - 6)}{\sqrt{x^2 - 6x + 10} - 1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4^x - 16}{\sqrt[5]{3-x} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{4}{\sqrt{x}}\right)^x$$

Контрольная работа № 3.

$$1. z = y \ln \frac{1}{x} + x^3 \sqrt{\sin 3y}. \text{ Найти } z''_{yy}, z''_{xy}.$$

2. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке $M_0(2; 4; z_0)$ к поверхности

$$z = 4x^2 - y^2 - 4x\sqrt{y} + 9y.$$

3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 - y^3 - 3xy.$$

4. Найти производную функции

$$u = xy^2 + z^3 - xyz \text{ в направлении вектора}$$

Контрольная работа № 2.

Построить графики функций с исследованием:

$$1. y = \operatorname{arctg} 2x - x$$

$$2. y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Найти производные функций:

$$3. \text{ а) } y = 2 \ln(x^2 + 5) - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}$$

$$\text{ б) } y = \sqrt[3]{1+x^2} \cdot 2^{3x} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{ в) } y = (4^{x^2} + x^4)^{\operatorname{ctg}^2 x}$$

$$\bar{l} = \bar{i} + \sqrt{2}\bar{j} + \bar{k} \text{ в точке } M_0(1;1;2).$$

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \text{ и точку } M(3;4;0).$$

Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2} \text{ с найденной плоскостью.}$$

6. Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(0;-2;-1)$, $D(4;5;3)$, площадь грани ABC , угол ADC .

Примерные варианты контрольных работ по курсу высшей математики для биологов, семестр 2.

Контрольная работа № 4.

Найти интегралы:

1. $\int \frac{3x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$

2. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$

3. $\int \frac{\sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$

4. $\int \cos^3 2x \cdot \sin^5 2x dx$

5. $\int \frac{dx}{3 + \cos 5x}$

Решить дифференциальное уравнение

6. $\sqrt{1-x^2} y' + x\sqrt{9-y^2} = 0$,
 $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Контрольная работа № 6.

Исследовать ряды на сходимость:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \dots \cdot (5n-3)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{\sqrt[3]{n^2}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{7}{n} \right)^{n^3}$

Контрольная работа № 5.

1. Найти площадь S фигуры, ограниченной линиями: $y = xe^x$, $x = e$, $y = 0$.

2. Найти длину l кривой $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$,
 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

3. Фигура ограничена линиями: $y = \cos 2x$,
 $y = 4$, $x = \frac{\pi}{4}$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Найти объемы V_{Ox}
и V_{Oy} тел вращения вокруг оси Ox и вокруг
оси Oy соответственно.

Решить уравнения:

4. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

5. $(xy' - 1)\ln x = 2y$

6. $y'' - y = 5e^x + 2x^2$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - \sin n}$

5. Определить область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)^2}{n^2 + 1} x^n$$

6. Разложить в ряд Маклорена функцию

$\ln \frac{1}{x^2 - 5x + 4}$. Чему равна область сходимости?

Вопросы к коллоквиуму:

1. Единственность предела, теоремы о связи пределов с бесконечно малыми.
2. Ограниченность величины, имеющей предел, теорема о сохранении знака.
3. Переход к пределу в неравенствах, теорема о «зажатой переменной».
4. Свойства бесконечно малых, связь с бесконечно большими.
5. Арифметические действия с пределами.
6. Точная верхняя и нижняя грани множества; теорема Вейерштрасса для последовательностей.
7. Число «е», $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.
8. Свойства эквивалентных (без таблицы).
9. Таблица эквивалентных.
10. Локальные свойства непрерывных функций; свойства функций, непрерывных на отрезке. Теорема о нуле функции.
11. Переход к пределу под знаком непрерывной функции; непрерывность сложной функции, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
12. Арифметические действия с непрерывными функциями, непрерывность рациональной, показательной и степенной функций.
13. Непрерывность тригонометрических функций; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
14. Теорема об обратной функции, непрерывность логарифмической и обратных тригонометрических функций.

Вопросы к экзамену, первый семестр:

1. Предел, ограниченность величины, имеющей предел, связь с бесконечно малыми, единственность предела.
2. Свойства бесконечно малых, связь с бесконечно большими.
3. Предел суммы, разности, произведения и частного.
4. Эквивалентные, их свойства, таблица эквивалентных.
5. Переход к пределу в неравенствах, теорема о сохранении знака, теорема о «зажатой переменной».
6. Точные верхняя и нижняя грани. Теорема Вейерштрасса.
7. Число «е».
8. Локальные свойства непрерывных функций, свойства функций, непрерывных на отрезке.

9. Арифметические свойства непрерывных функций, непрерывность элементарных функций, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.
10. Переход к пределу под знаком непрерывной функции, непрерывность сложной функции, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.
11. Дифференцируемость функции одной переменной, связь с непрерывностью и производной, дифференциал.
12. Правила дифференцирования, производная сложной функции, обратной функции и функции, заданной параметрически.
13. Теорема Ферма.
14. Теорема Ролля.
15. Теорема Лагранжа, следствие.
16. Достаточный признак экстремума функции одной переменной.
17. Достаточный признак возрастания (убывания) функции.
18. Сравнение скоростей роста степенной, показательной и логарифмической функций.
19. Достаточный признак выпуклости.
20. Формула Тейлора.
21. Дифференцируемость функции двух переменных, связь с непрерывностью и частными производными.
22. Две теоремы о производных сложной функции двух переменных.
23. Дифференциал функции двух переменных, геометрический смысл, инвариантность.
24. Производная по направлению, градиент.
25. Квадратичные формы, знакоопределенность, формулировка критерия Сильвестра. Второй дифференциал функции двух переменных как квадратичная форма.
26. Локальный экстремум функции двух переменных.
27. Матрицы и определители, распределение генотипов в популяции.
28. Собственные значения матрицы, стационарное распределение генотипов.
29. Основные формулы векторной алгебры.

Вопросы к экзамену, второй семестр:

1. Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования.
2. Таблица интегралов.
3. Определенный интеграл, простейшие свойства, необходимое условие интегрируемости.
4. Формулировка критерия Лебега; следствия из него.
5. Интегрирование неравенств, разбиение отрезка интегрирования, пределы интегрирования.
6. Теорема о среднем для определенных интегралов.
7. Свойства интеграла как функции верхнего предела. Формула Ньютона – Лейбница.
8. Методы подстановки и интегрирования по частям для определенных интегралов.
9. Формула Тейлора.
10. Площадь области и длина дуги.
11. Объемы тел вращения.
12. Несобственные интегралы, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

13. Дифференциальные уравнения первого порядка, формулировка теоремы существования и единственности, методы изоклин и ломаных Эйлера.
14. Уравнения радиоактивного распада и роста биомассы.
15. Модель роста деревьев.
16. Модель «хищник – жертва».
17. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка (общая теория).
18. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.
19. Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши; ряды с положительными членами, признаки сравнения.
20. Признаки Коши и Даламбера.
21. Интегральный признак Коши. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.
22. Абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница.
23. Непрерывность суммы функционального ряда.
24. Дифференцирование и интегрирование функциональных рядов.
25. Теорема Абеля для степенных рядов, радиус и интервал сходимости, сохранение радиуса при дифференцировании и интегрировании ряда.
26. Свойства суммы степенного ряда. Ряды Тейлора, шесть основных разложений.
27. Ряды с комплексными членами, формула Эйлера.

XI. Список литературы

| № п/п, Автор | Название книги | Место издания | Издательство | Год издания | Том |
|--|---|------------------|-------------------------------------|----------------|-----|
| 1.Кудрявцев Л.Д. | Курс математического анализа | Москва | Высшая школа | 1981 | 1 |
| 2.Кудрявцев Л.Д. | Курс математического анализа | Москва | Высшая школа | 1981 | 2 |
| 3.Сударев Ю.Н. Першикова Т.В. Радославова Т.В. | Основы линейной алгебры и математического анализа. Высшая математика и ее приложения к биологии. Университетский учебник. | Москва | Издательский центр "Академия" | 2009 | |

XII. Материально техническое обеспечение

- А. Поточная аудитория на 200 человек для лекций и аудитории на 30 человек для практических занятий;
- Б. Доска, мел, тряпка;
- В. Иные материалы не требуются.

Автор программы – доцент кафедры математического анализа механико-математического ф-та МГУ к.ф.-м.н. Ю.Н. Сударев.